1. Na ispitu iz povijesti učenik je na pitanje kada je otkriveno nalazište pračovjeka na Hušnjakovom brdu u Krapini odgovorio 869. godine. Profesorica mu je oduzela bod jer je točan odgovor 1899. g., ali on je uporno tvrdio kako je u pravu. Uspio je dokazati istinitost svoje tvrdnje te zadiviti profesoricu koja mu je ipak priznala bod.
   Kako je to moguće? (4.R)

(autor zadatka: Jelena Sajko, 4.a razred)

Rješenje:

Evo kako je učenik dokazao svoju tvrdnju.
Učenik je svoje rješenje zapisao u drugom brojevnom sustavu.

$$8x^2 + 6x + 9 = 1899$$
$$8x^2 + 6x - 1890 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 8 \cdot (-1890)}}{16} = \frac{-6 \pm 246}{16}$$
$$x_1 = 15 \qquad x_2 = \frac{-63}{4}$$

Drugo rješenje jednadžbe ne odgovara jer baza brojevnog sustava može biti samo prirodan broj.

$$869_{(15)} = 8 \cdot 15^2 + 6 \cdot 15 + 9 = 1899_{(10)}$$

Stoga, učenik je svoje rješenje zapisao u brojevnom sustavu s bazom 15.

2. Krapinski neandertalac niži je od prosječnog današnjeg čovjeka. Kad bi visina današnjeg čovjeka bila manja za 10 centimetara bili bi jednake visine, a kad bi krapinski neandertalac bio niži za 75 centimetara, današnji bi čovjek bio dvostruko viši od krapinskog neadertalca.
   Koliko je bila visina krapinskog neandertalca?

(1.R)

(autor zadatka: Helena Polanščak, 2.d razred)

Rješenje:

$$\begin{cases} y - 10 = x \\ x - 75 = \frac{1}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2}y = 75 /\cdot 2 \\ y - x = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 150 \\ -x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = 160 \text{ cm}, y = 170 \text{ cm}$$

Krapinski neandertalac bio je prosječno visok 160 cm.

3. Muzej krapinskog pračovjeka od otvorenja u veljači 2010. godine mjesečno posjeti gotovo 7 500 posjetitelja. Vodstvo muzeja je početkom travnja iste godine odlučilo nagraditi 700 000 posjetitelja računajući od ožujka iste godine.
U kojem je mjesecu koje godine stigao posjetitelj koji je osvojio nagradu?
(Broj mjeseci zaokruži na cijeli broj.) (4.R)

(autor zadatka: Jelena Sajko, 4.a razred)

Rješenje:

Broj posjetitelja u veljači bio je 7 500, u ožujku 15 000, u travnju 22 500,…
Iz toga možemo zaključiti kako se radi o aritmetičkom nizu.

$a_1 = 15000$
$a_n = 700000$
$d = 7500$
$n = ?$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$
$$700000 = 15000 + (n-1) \cdot 7500$$
$$7500n - 7500 = 685000$$
$$7500n = 692500$$
$$n \approx 92\ mj$$

$\begin{cases} 92:12 \approx 7.4 \\ 7 \cdot 12 = 84 \\ 92 - 84 = 8 \end{cases}$ $\Rightarrow$ **Za 7 godina i 8 mjeseci ,odnosno u studenom 2017. godine**

4. Riješite kvadratnu jednadžbu: $x^2 - 13x + 36 = 0$.

Dobit ćete dva rješenja kojima trebate pridružiti odgovarajuća slova u abecedi (npr. broju 3 odgovara 3. slovo abecede), kako bi dobili prva dva slova imena jednog od troje legendarne krapinske braće.

Zbroj rješenja jednadžbe je broj za jedan veći od vama potrebnog kako bi dobili treće slovo imena. (2.R)

(autor zadatka: Helena Polanščak, 2.d razred)

Rješenje:

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2}$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{13 \pm 5}{2}$$

$\boldsymbol{x_1 = 4}$, $\boldsymbol{x_2 = 9}$, $\boldsymbol{x_1 + x_2 = 13}$

4, 9, 12 Č E H

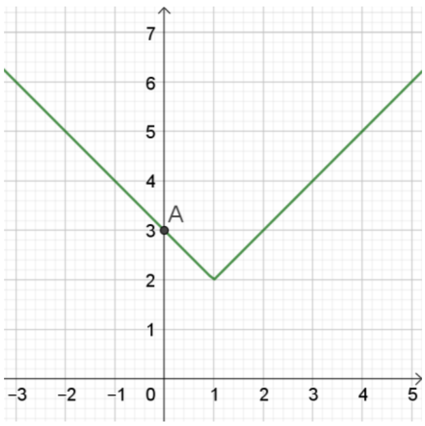
5. Stara krapinska legenda govori da su u vrijeme rimske vladavine na brdima iznad Krapine živjela tri brata: Čeh, Leh i Meh i njihova sestra Vilina. Braća su se htjela osloboditi rimskog gospodarstva i skovala su plan kako će to učiniti, ali ih je sestra, koja je bila zaljubljena u rimskog namjesnika, izdala. Braća su ubila rimskog namjesnika te su u strahu od odmazde morala bježati na sjever gdje su utemeljili slavenske države: Čeh Češku, Leh Poljsku, a Meh Rusiju.

   Odrediš li odsječak grafa funkcije $f(x) = |x-1| + 2$ na y osi otkrit ćeš koliko brda okružuje Krapinu na kojima su nekad živjela braća. (1.R)

   (autor zadatka: Luka Škrlec, 2.a razred)

   Rješenje:

$$f(x) = |x-1| + 2 = \begin{cases} x-1+2, & x-1 \geq 0 \\ -x+1+2, & x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ -x+3, & x < 1 \end{cases}$$



Odsječak grafa na y osi je 3. Dakle, rješenje je 3 brda. To su Šabac, Stari grad i Psar.

6. Učenici su proučavali Stari Grad u Krapini. Prema legendi, u zidine te zgrade zazidana je Vilina, sestra Čeha, Leha i Meha.

Učenici iz najniže točke Krapine vide Stari Grad pod kutom od 34°12'.
Na kojoj se visini nalazi Stari Grad u odnosu na najnižu točku Krapine? (2.R)

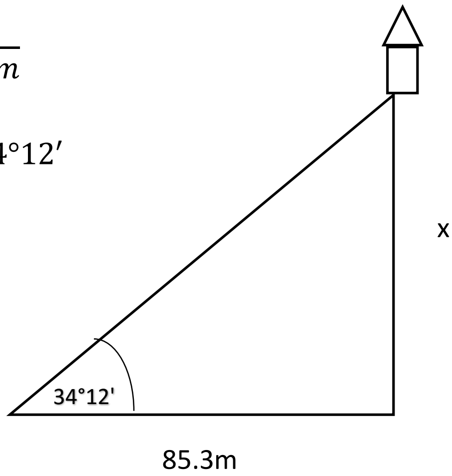
(autor zadatka: Jelena Sajko, 4.a razred)

Rješenje:

$$\tan 34°12' = \frac{x}{85{,}3m}$$

$$x = 85{,}3 \cdot \tan^{-1} 34°12'$$

$$x \approx 58m$$



Stari Grad nalazi se na visini od 58 metara u odnosu na najnižu točku Krapine.

7. Ljudevit Gaj, hrvatski političar, jezikoslovac, ideolog, novinar, književnik i središnja osoba hrvatskog narodnog preporoda rođen je u Krapini 1809. godine. Odrediš li eksponent potencije:

$$z = (1 - i)^7,$$

dobit ćeš mjesec u kojem je rođen, a realni dio kompleksnog broja otkrit će ti dan njegova rođenja. (4.R)

(autor zadatka: Jelena Sajko, 4.a razred)

Rješenje:

eksponent: 7

$$z = \binom{7}{0} 1^7 \cdot i^0 - \binom{7}{1} 1^6 \cdot i^1 + \binom{7}{2} 1^5 \cdot i^2 - \binom{7}{3} 1^4 \cdot i^3 +$$
$$\binom{7}{4} 1^3 \cdot i^4 - \binom{7}{5} 1^2 \cdot i^5 + \binom{7}{6} 1^1 \cdot i^6 - \binom{7}{7} 1^0 \cdot i^7$$

$$= 1 - 7i - 21 + 35i + 35 - 21i - 7 + i$$

$$= 8 + 8i$$

$$\mathrm{Im}\, z = 8$$

Ljudevit Gaj rođen je 8. srpnja.

8. Riješi sljedeću jednadžbu i otkrit ćeš koliko je godina živio Ljudevit Gaj.

$$\log \mathrm{tg}1° + \log \mathrm{tg}2° + \log \mathrm{tg}3° + \cdots + \log \mathrm{tg}89° = \cos \frac{10}{7} x$$ (3.R)

(autor zadatka: Ana Tušek, 3.a razred)

Rješenje:

$$\log \mathrm{tg}1° + \log \mathrm{tg}89° = \log(\mathrm{tg}1° \cdot \mathrm{tg}89°) = \log(\frac{\sin 1°}{\cos 1°} \cdot \frac{\sin 89°}{\cos 89°})$$
$$= \log \frac{0.5(\cos 88° - \cos 90°)}{0.5(\cos 90° - \cos 88°)} = \log \frac{\cos 88°}{\cos 88°} = \log 1 = 0$$

$$\log \mathrm{tg}2° + \log \mathrm{tg}88° = \log(\mathrm{tg}2° \cdot \mathrm{tg}88°) = \log(\frac{\sin 2°}{\cos 2°} \cdot \frac{\sin 88°}{\cos 88°})$$
$$= \log \frac{0.5(\cos 86° - \cos 90°)}{0.5(\cos 90° - \cos 86°)} = \log \frac{\cos 86°}{\cos 86°} = \log 1 = 0$$

...

Ostaje: $\log \mathrm{tg}45° = \log 1 = 0$

$$\cos \frac{10}{7} x = 0$$
$$\frac{10}{7} x = 90° + k \cdot 180° \;/ : \frac{10}{7}$$
$$x = 63° + k \cdot 180°,\; k \in \mathbb{Z}$$

Za $k = 0$ dobivamo odgovor:

Ljudevit Gaj umro je sa navršenih 63 godine.

9. Crkva sv. Katarine i samostan franjevaca Provincije sv. Ćirila i Metoda je najstariji sakralni objekt u Krapini. U samostanu postoji knjižnica utemeljena 1650. godine i muzej s rijetkom zbirkom knjiga i sakralne umjetnosti Hrvatskog zagorja.

   Površina trokuta, čije su stranice duljina $a = 62.83$, $b = 54.35$, a zbroj veličina kutova $\alpha + \beta = 106°$, jednaka je godini izgradnje crkve sv. Katarine i franjevačkog samostana. (3.R)

   (autor zadatka: Ana Tušek, 3.a razred)

Rješenje:

$a = 62.83$
$b = 54.35$
<u>α+β=106°</u>
P=?

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 74°$$

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{62.83 \cdot 54.35 \cdot \sin 74°}{2} = 1641$$

Crkva sv. Katarine i samostan franjevaca izgrađeni su 1641.godine.

10. Pažnja! Lopov Etevi, poznat po svojim matematičkim zagonetkama, ukrao je gotovo sve podatke o crkvi na Trškom vrhu u Krapini. Ostavio je upute:

˝Ako odredite stoljeće izgradnje crkve, vratit ću vam sve podatke. Evo malo pomoći: zbroj kvadrata rješenja jednadžbe $x^2 - 8x + q = 0$ jednak je 34. Zbrajanjem dobivenog q i manjeg rješenja jednadžbe dobit ćete ono što tražite. ˝ (2.R)

(autor zadatka: Luka Škrlec, 2.a razred)

Rješenje:

$$x^2 - 8x + q = 0$$

$${x_1}^2 + {x_2}^2 = 34$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 34$$

$$\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{c}{a}\right) = 34$$

$$8^2 - 2 \cdot q = 34$$

$$q = 15$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = 3$$

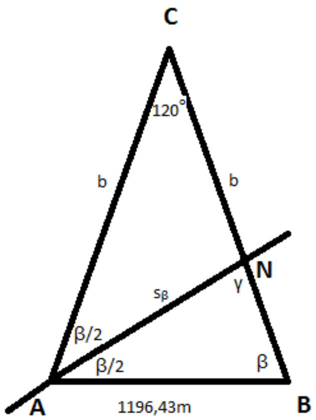
Crkva je izgrađena u 18.st.

11. Strahinjčica je planina u Hrvatskom zagorju u čijem se južnom podnožju smjestio grad Krapina. Rješenje sljedećeg zadatka otkrit će ti nadmorsku visinu najvišeg vrha Sušec.

Zadan je jednakokračan trokut čija je osnovica duljine 1196.43 m, a kut nasuprot osnovice veličine 120°. Izračunaj duljinu simetrale kuta uz osnovicu. (3.R)

(autor zadatka: Ana Tušek, 3.a razred)

Rješenje:



$\alpha = 120°$

$\underline{a = 1196.43\text{ m}}$

$s_\beta = ?$

$$\beta = \frac{180° - \alpha}{2} = 30°$$

$$\gamma = 180° - \left(\beta + \frac{\beta}{2}\right) = 135°$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{s_\beta}{\sin\beta} \Rightarrow s_\beta = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = 846\text{ m}$$

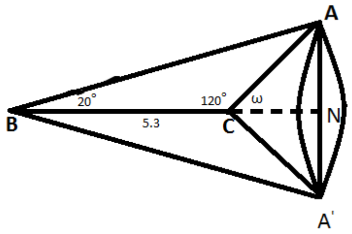
Visina Strahinjčice je 846 m.

12. Rijeka Krapinčica izvire na južnim padinama Maceljskog gorja, a teče kroz grad Krapinu. Oko 1 km južno od sela Pavlovec Zabočki ulijeva se u rijeku Krapinu. Dužina rijeke Krapinčice jednaka je obujmu rotacijskog tijela koje nastaje rotacijom trokuta oko stranice a, a zadani elementi su $a = 5.3,\ \beta = 20°,\ \gamma = 120°$.

Napomena: za π koristi 3.14 i dobiveni rezultat zaokruži na 1 decimalu (3.R)

(autor zadatka: Ana Tušek, 3.a razred)

Rješenje:



$$V = \frac{B \cdot h}{3}$$

$$V = V_{ABA'} - V_{ACA'}$$

$$V = \frac{|AN|^2 \cdot 3.14 \cdot |BN|}{3} - \frac{|AN|^2 \cdot 3.14 \cdot |CN|}{3} = \frac{|AN|^2 \cdot 3.14 \cdot (|CN| + 5.3)}{3} - \frac{|AN|^2 \cdot 3.14 \cdot |CN|}{3}$$

$$= \frac{|AN|^2 \cdot 3.14}{3} (|CN| + 5.3 - |CN|) = \frac{|AN|^2 \cdot 3.14 x 5.3}{3}$$

$$\omega = 180° - 120° = 60°$$

$$\frac{a}{sin40} = \frac{b}{sin20} \Rightarrow b = \frac{a \cdot sin20}{sin40} = 2.8$$

$$\sin 60° = \frac{|AN|}{b} \Rightarrow |AN| = \sin 60° \cdot 2.8$$

$$\Rightarrow |AN| = 2.5$$

$$V = 34.7$$

Duljina rijeke Krapinčice je 34.7 km.

13. Rješenja zadane jednadžbe:

$$75\sin^2 x + 4.6\cos^2 x = 66.2\sin 2x - 25$$

pokazat će ti na kojoj geografskoj širini i dužini se smjestio grad Krapina.
(Napomena: dobiveni rezultat zaokruži na 1 decimalu) (3.R)

(autor zadatka: Ana Tušek, 3.a razred)

Rješenje:

$$75\sin^2 x + 4.6\cos^2 x = 66.2\sin 2x - 25$$

$$75\sin^2 x - 66.2\cdot 2\cdot \sin x\cos x + 4.6\cos^2 x = -25$$

$$75\sin^2 x - 132.4\sin x\cos x + 4.6\cos^2 x = -25$$

$$75\sin^2 x - 132.4\sin x\cos x + 4.6\cos^2 x = -25\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$100\sin^2 x - 132.4\sin x\cos x + 29.6\cos^2 x = 0 \ /{:}\cos^2 x$$

$$100\,\mathrm{tg}^2 x - 132.4\,\mathrm{tg}\, x + 29.6 = 0$$

$$\mathrm{tg}\, x_{1,2} = \frac{132.4 \pm \sqrt{(-132.4)^2 - 4\cdot 100\cdot 29.6}}{2\cdot 100}$$

$$\mathrm{tg}\, x_1 = \frac{132.4+75.43}{200} = 1.039 \qquad \mathrm{tg}\, x_2 = \frac{132.4-75.43}{200} = 0.285$$

$$\mathrm{arctg}_1(1.039) = 46.1°$$

$$\mathrm{arctg}_2(0.285) = 15.9°$$

Krapina je smještena na 46.1° sjeverne geografske širine i 15.9° istočne geografske dužine .

14. Površina Pazina je za $504\ \mathrm{km}^2$ manja od površine Zagreba i 2.854 puta veća od površine Krapine. Kolika je površina Krapine ako je površina Zagreba $641\ \mathrm{km}^2$?

(1.R)

(autor zadatka: Karlo Ravenski, 2.a razred)

Rješenje:

$P_{Zagreba} = 641\ \mathrm{km}^2$

$P_{Pazina} = P_{Zagreba} - 504$

$P_{Pazina} = P_{Krapine} \cdot 2.854$

$P_{Krapine} = ?$

$P_{Zagreba} = 641\ \mathrm{km}^2 \quad \Rightarrow \quad P_{Pazina} = 641 - 504 = 137\ \mathrm{km}^2$

$P_{Pazina} = P_{Krapine} \cdot 2.854 \quad \Rightarrow \quad 137 = P_{Krapine} \cdot 2.854$

$\Rightarrow \quad P_{Krapine} = 48\ \mathrm{km}^2$

Površina Krapine jednaka je $\mathbf{48\ km^2}$.

15. Zadani su opseg i površina pravokutnika. Opseg pravokutnika je 24 960, a površina 37 431. Zbroj duljina stranica pravokutnika a i b daje nam broj stanovnika Krapine prema popisu stanovništva 2001.godine. (2.R)

(autor zadatka: Karlo Ravenski, 2.a razred)

Rješenje:

$$O = 24\,960 = 2a + 2b$$

$$P = 37\,431 = a \cdot b \Rightarrow a = \frac{37\,431}{b}$$

$$24\,960 = 2 \cdot \frac{37\,431}{b} + 2b$$

$$24\,960b = 74\,862 + 2b^2$$

$$2b^2 - 24\,960b + 74\,862 = 0$$

$$b^2 - 12\,480b + 37\,431 = 0$$

$$b_1 = 12\,477 \qquad b_2 = 3$$

$$a_1 = \frac{24\,954}{12\,477} = 3 \qquad a_2 = \frac{24\,954}{2} = 12\,477$$

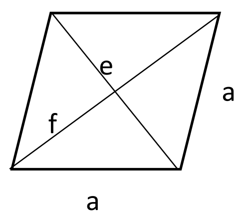
Prema popisu iz 2001. godine, Krapina je imala $\mathbf{3 + 12\,477 = 12\,480}$ stanovnika.

16. Festival kajkavskih popevki svake se godine u rujnu održava u Krapini. Njime se zaključuje Tjedan kajkavske kulture te je jedan od najstarijih hrvatskih glazbenih festivala.

Opseg romba čija je površina $120\ \mathrm{cm}^2$, a duljina jedne dijagonale $10\ \mathrm{cm}$ govori ti koji je po redu Festival održan 2017.godine. (2.R)

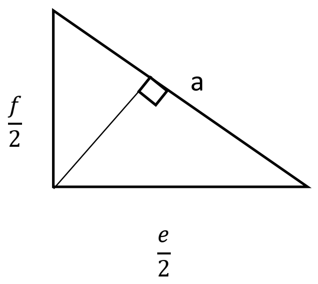
(autor zadatka: Jelena Sajko, 4.a razred)

Rješenje:



$P = 120cm^2$
$\underline{e = 10cm}$
$O = ?$

$$P = \frac{e \cdot f}{2} \Rightarrow f = \frac{2P}{e} = 24\ \mathrm{cm}$$



$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2$$

$$a^2 = 25 + 144 = 169$$

$$a = 13\ \mathrm{cm}$$

$$O = 4a = 4 \cdot 13 = 52\ \mathrm{cm}$$

2017.godine održan je 52. Festival kajkavskih popevki u Krapini.